第 11 講　ベクトル方程式

PART1　直線のベクトル方程式

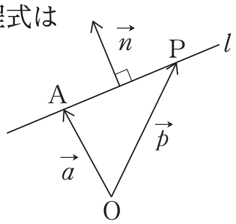
1 (1) 点 A$(-2,\ 1)$ を通り，直線 $l:3x-5y+4=0$ に平行な直線を g，垂直な直線を h とする。g と h の方程式をそれぞれ求めよ。

(2) 法線ベクトルを利用し，2 直線 $3x+y+6=0$ と $x+2y-5=0$ のなす鋭角を求めよ。

Point Pickup

(1) 点 A$(\vec{a})$ を通り，$\vec{0}$ でないベクトル $\vec{n}$ に垂直な直線のベクトル方程式は

$$\vec{n}\cdot(\vec{p}-\vec{a})=0$$



$\vec{n}$ を，この直線の法線ベクトルという。

直線 $l:ax+by+c=0$ は，$\vec{n}=(a,\ b)$ を法線ベクトルにもつ。

(2) 2 直線の法線ベクトルのなす角を $\alpha\,(0^\circ\leqq\alpha\leqq180^\circ)$ とすると，2 直線のなす角 θ は

$0^\circ\leqq\alpha\leqq90^\circ$ のとき　$\theta=\alpha$

$90^\circ<\alpha\leqq180^\circ$ のとき　$\theta=180^\circ-\alpha$

第11講　PART1　確認問題

1 点 A$(2,\ -3)$ を通り，直線 l：$5x+2y+4=0$ に平行な直線を g，垂直な直線を h とする。g と h の方程式をそれぞれ求めよ。

直線 l の法線ベクトルの１つは $\vec{n}=$ [ア] であり

直線 g の方程式は [イ] $x+$ [ウ] $y-$ [エ] $=0$

一方，直線 h の法線ベクトルの１つは $\vec{m}=$ [オ] であり

直線 h の方程式は [カ] $x-$ [キ] $y-$ [クケ] $=0$

[[ア] ，[オ] の選択肢]

① $(5,\ 2)$　　② $(2,\ 5)$

③ $(5,\ -2)$　　④ $(2,\ -5)$

2 法線ベクトルを利用し，２直線 $x+\sqrt{3}\,y+4=0$ と $\sqrt{2}\,x-\sqrt{6}\,y-1=0$ のなす鋭角 α を求めよ。

$\alpha=$ [コサ]$^\circ$

第 11 講　ベクトル方程式

PART1　直線のベクトル方程式

1　(1)　点 $\mathrm{A}(-2,\ 1)$ を通り，直線 $l : 3x-5y+4=0$ に平行な直線を g，垂直な直線を h とする。g と h の方程式をそれぞれ求めよ。

(2)　法線ベクトルを利用し，2 直線 $3x+y+6=0$ と $x+2y-5=0$ のなす鋭角を求めよ。

(1)　$\vec{n}=(3,\ -5)$ は，直線 $l : 3x-5y+4=0$ の法線ベクトルの 1 つである。

直線 l と g は平行であるから，g は $\vec{n}$ を法線ベクトルにもつ。ゆえに，直線 g 上の点を $\mathrm{P}(x,\ y)$ とすると

$$\vec{n}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AP}}=0$$

よって，$3(x+2)-5(y-1)=0$ より，直線 g の方程式は $3x-5y+11=0$

直線 l と h は垂直であるから，h は $\vec{n}$ を方向ベクトルにもつ。

ここで，$\vec{m}=(5,\ 3)$ について，$\vec{m}\cdot\vec{n}=5\times3+3\times(-5)=0$ より，$\vec{m}\perp\vec{n}$ であるから

$\vec{m}$ は，直線 h の法線ベクトルの 1 つである。ゆえに，直線 h 上の点を $\mathrm{Q}(x,\ y)$ とすると

$$\vec{m}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AQ}}=0$$

よって　$5(x+2)+3(y-1)=0$ より，直線 h の方程式は $5x+3y+7=0$

(2)　$\vec{n}=(3,\ 1)$ は直線 $3x+y+6=0$ の法線ベクトルの 1 つである。

また，$\vec{m}=(1,\ 2)$ は直線 $x+2y-5=0$ の法線ベクトルの 1 つである。

$\vec{n}$，$\vec{m}$ のなす角を θ $(0^\circ\leqq\theta\leqq180^\circ)$ とすると

$$|\vec{n}|=\sqrt{3^2+1^2}=\sqrt{10},\quad |\vec{m}|=\sqrt{1^2+2^2}=\sqrt{5},\quad \vec{n}\cdot\vec{m}=3\times1+1\times2=5$$

$$\cos\theta=\frac{\vec{n}\cdot\vec{m}}{|\vec{n}||\vec{m}|}=\frac{5}{\sqrt{10}\sqrt{5}}=\frac{1}{\sqrt{2}}\qquad よって\qquad \theta=45^\circ$$

したがって，2 直線のなす鋭角は 45°

第 11 講　PART1　確認問題 解答

1 **[正解]** ア：①，イ：5，ウ：2，エ：4，オ：④，
カ：2，キ：5，クケ：19

[解説]

$\vec{\boldsymbol{n}}=(5,\ 2)$ は，直線 l：$5x+2y+4=0$ の法線ベクトルの 1 つである。 [A] [B]

直線 l と g は平行であるから，g は $\vec{n}$ を法線ベクトルにもつ。

ゆえに，直線 g 上の点を $\mathrm{P}(x,\ y)$ とすると，

$$\vec{n}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AP}}=0$$ [A]

$\overrightarrow{\mathrm{AP}}=(x-2,\ y+3)$ より

$$5(x-2)+2(y+3)=0$$

したがって，直線 g の方程式は

$$\boldsymbol{5x+2y-4=0}$$

直線 l と h は垂直であるから，h は $\vec{n}$ を方向ベクトルにもつ。

ここで，$\vec{\boldsymbol{m}}=(2,\ -5)$ について，

$\vec{m}\cdot\vec{n}=2\times5+(-5)\times2=0$ より，$\vec{m}\perp\vec{n}$ であるから，$\vec{m}$ は，直線 h の法線ベクトルの 1 つである。

ゆえに，直線 h 上の点を $\mathrm{Q}(x,\ y)$ とすると，

$$\vec{m}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AQ}}=0$$ [A]

$\overrightarrow{\mathrm{AQ}}=(x-2,\ y+3)$ より

$$2(x-2)-5(y+3)=0$$

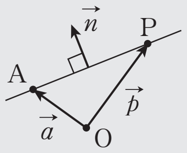
したがって，直線 h の方程式は

$$\boldsymbol{2x-5y-19=0}$$

[A]　点 $\mathrm{A}(\vec{a})$ を通り，$\vec{0}$ でないベクトル $\vec{n}$ に垂直な直線のベクトル方程式は

$$\vec{n}\cdot(\vec{p}-\vec{a})=0$$

$\vec{n}$ を，この直線の法線ベクトルという。



[B]　直線 $ax+by+c=0$ は，

$$\vec{n}=(a,\ b)$$

を法線ベクトルにもつ。

2 **[正解]** コサ：60

[解説]

$\overrightarrow{n}=(1,\ \sqrt{3})$ は，直線 $x+\sqrt{3}y+4=0$ の法線ベクトルの 1 つである。

また，$\overrightarrow{m}=(\sqrt{2},\ -\sqrt{6})$ は，

直線 $\sqrt{2}x-\sqrt{6}y-1=0$ の法線ベクトルの 1 つである。

$\overrightarrow{n}$，$\overrightarrow{m}$ のなす角を $\theta\,(0°\leqq\theta\leqq180°)$ とすると

$$|\overrightarrow{n}|=\sqrt{1^2+(\sqrt{3})^2}=2$$

$$|\overrightarrow{m}|=\sqrt{(\sqrt{2})^2+(-\sqrt{6})^2}=2\sqrt{2}$$

$$\overrightarrow{n}\cdot\overrightarrow{m}=1\times\sqrt{2}+\sqrt{3}\times(-\sqrt{6})=-2\sqrt{2}$$

であるから

$$\cos\theta=\frac{\overrightarrow{n}\cdot\overrightarrow{m}}{|\overrightarrow{n}||\overrightarrow{m}|}=\frac{-2\sqrt{2}}{2\times2\sqrt{2}}=-\frac{1}{2}$$

よって　$\theta=120°$ [C]

したがって，2 直線のなす鋭角 α は

$$\alpha=180°-120°=\mathbf{60}°$$

[C]　2 直線の法線ベクトルのなす角を $\theta\,(0°\leqq\theta\leqq180°)$ とすると，2 直線のなす角 α は
$0°\leqq\theta\leqq90°$ のとき　$\alpha=\theta$
$90°<\theta\leqq180°$ のとき　$\alpha=180°-\theta$